

電子天平自校能力之可行性試驗

黃敏聖、劉振南/台南分局技士

壹、前言

本分局各課室及辦事處所擁有的小質量電子天平（100g~32kg，共計 23 台）設備，為執行業務進行實驗或檢定作業所仰賴之重要儀器機具，為符合儀器之精準性，每年皆須向總局七組申請電子天平之游校檢定；每次游校申請，除了需派車至總局載運標準法碼之先行作業外，還需支付校正人員差旅費用，加上往返之舟車勞頓，零零總總耗費不少人力及物力。而校正天平所需之標準器：法碼，本分局早已具備，且為 E_2 等級之標準法碼（1mg~20kg），這些標準法碼皆依校正週期（2~3 年）按時送至國家實驗室進行校正，故本分局已具備校正各式小質量天平之基本能量。有鑑於此，本試驗希望藉由評估天平校正影響因子，進一步了解本分局電子天平之校正能力；如此一來，將可增進本分局電子天平校正之效率。

本試驗是以 *Mettler Toledo PR5003* 型（最大秤量 5100g）電子天平為實證案例，實際評估天平的校正能力，包含量測不確定度因子分析、擴充不確定度計算及量測品保等系統能量評估，以作為未來成立實驗室，執行電子天平校正業務之不確定度評估依據。

本研究之量測不確定度分析主要是依據量測不確定度指引（*Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement, Geneva* : ISO, 1995.）。

貳、系統簡介

2.1 恆溫室簡介

本試驗操作過程於本分局度政大樓恆溫室作業，由於恆溫室環境溫度採用獨立空調系統控制，但空調系統並無加熱器，故室內溫度一般控制在 15°C~30°C 之間；另外，恆溫室亦具備除濕機，相對溼度可控制在 45%~65% 之間；大氣壓力約為 760mmHg。

2.2 系統設備

本試驗之電子天平採用國際大廠 *Mettler Toledo PR5003* 電磁力補償電子天平，最大秤量為 5100g，最小分度值為 10mg 及 1mg。而試驗過程所使用之查核法碼（100g~5kg）其校正可追溯國家實驗室，且校正結果符合國際標準規範 *OIML R111* 之 E_2 級法碼標準。

參、量測原理及程序

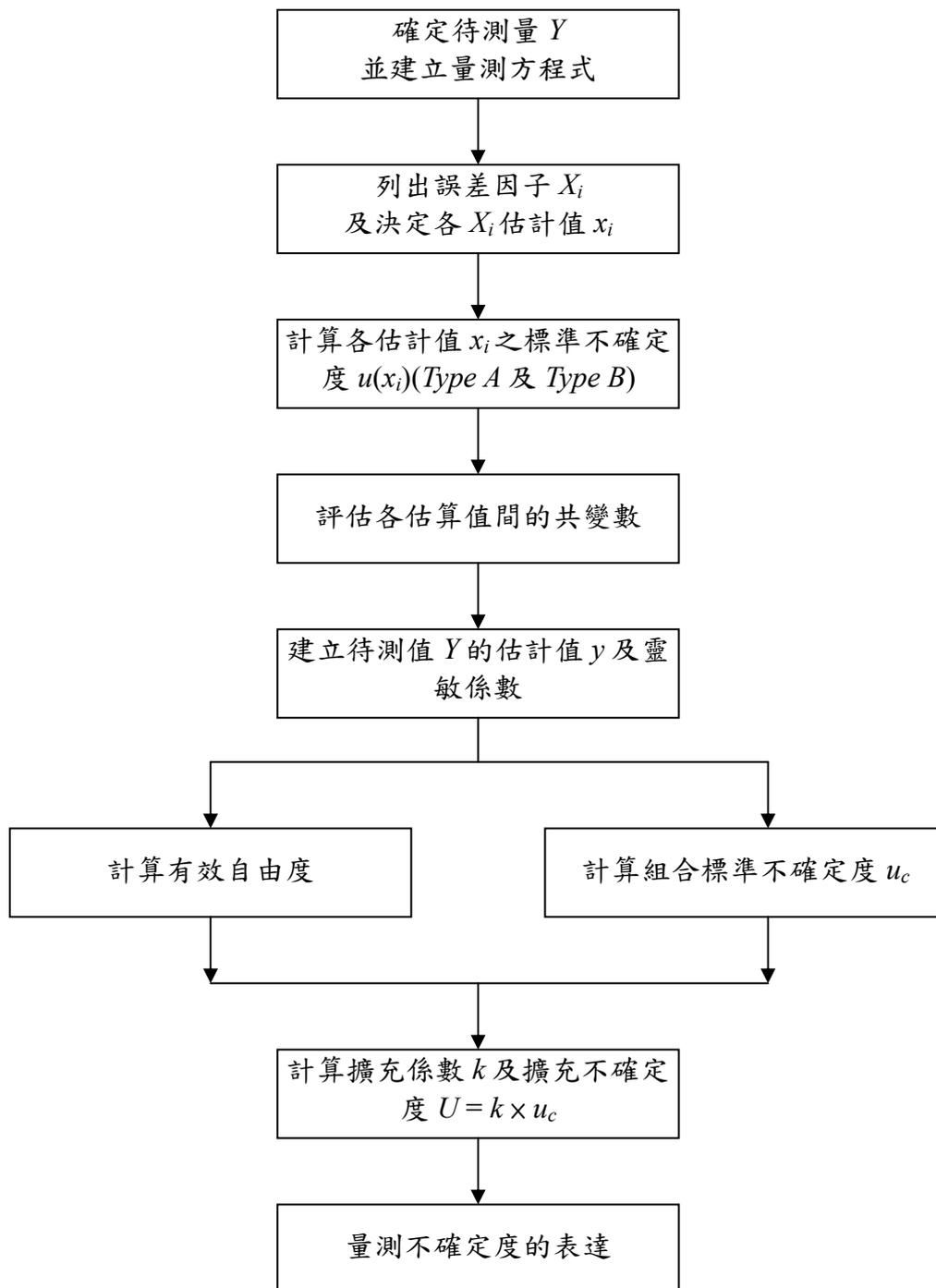
1. 本試驗所進行之電子天平校正是以 E_2 級標準法碼作為工作件，電子天平則為待校件，利用工作件對待校件進行校正比對，求得標準法碼與待校天平讀值之間的平均差值；另外考量影響量測之校正因子，求得各因子的不確定度，之後再配合統計及數學運算，計算出量測結果的平均數、標準差及不確定度等相關數據資料。
2. 量測不確定度評估如第肆節所述。
3. 量測品保如第伍節所述。

肆、量測不確定度分析

本試驗之不確定度計算係依據 *OILM R111* 及量測不確定度指引等資料。不確定度計算應用在質量比較方面，可估算成 *A* 類評估 (*Type A*) 及 *B* 類評估 (*Type B*) 兩種，*A* 類評估主要是量測統計之分析，而 *B* 類評估則為其他認知方面之分析。本研究是依據 *ISO GUM* 所敘述之不確定度評估八大步驟 (如圖一) 進行，說明如下：

1. 決定量測方程式，找出不確定度來源： $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$
2. 決定量測值： x_1, x_2, \dots, x_n
3. 估算每一量測值之標準不確定度： $u_c(x_i)$
4. 若量測值具相關性，需估算其共變數 (Covariance)
5. 根據量測方程式計算 Y 的估計值 y 及靈敏係數
6. 決定 y 的組合標準不確定度： $u_c(y)$
7. 計算擴充不確定度： $U = k \times u_c(y)$
8. 量測結果表示： $y \pm U = y \pm k \times u_c(y)$

本試驗係針對 *Mettler Torledo PR5003* 型電子天平 (最大秤量 5100g，分度值 10mg 及 1mg) 進行量測不確定度之評估作業分析，依循前述八大流程計算擴充不確定度。量測過程之原始紀錄、量測值計算、擴充不確定度計算等資料詳見附錄。本研究係利用 *EXCEL* 軟體試算上述資料並建立品質管制界線。



圖一：量測不確定度評估流程圖

4.1 步驟一：決定量測方程式

量測方式是將標準法碼置於待校件（電子天平）上，以相互比對方式求得兩者之間的差值，即修正後天平讀值 = (天平讀值 - 標準法碼質量) + 標稱值，其量測方程式建立如下：

$$I_c = (R - m_s) + m_N \quad (4-1)$$

其中 I_c ：修正後天平讀值

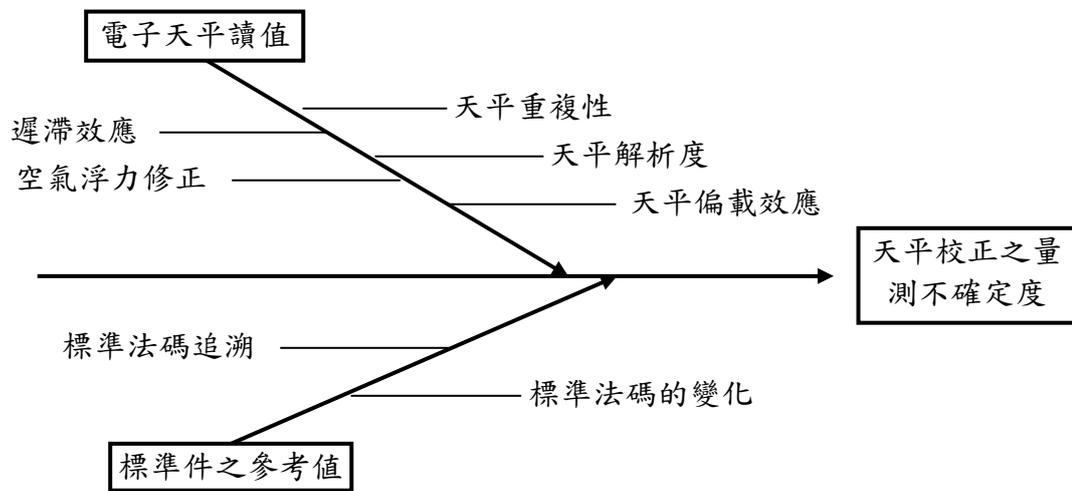
R ：天平讀值

m_s ：標準法碼質量

m_N ：標稱值

接下來，探討影響天平不確定度之來源，主要包含兩大類因子，分別為標準件（標準法碼）之參考值及天平讀值，並針對這兩個因子列出其影響因子，然後製成特性要因圖（如圖二）：

- (1) 標準件之參考值：即影響標準法碼之因子，此類又包括標準法碼之變化及標準法碼之追溯。
- (2) 電子天平讀值：即標準件與待校件進行比對時，兩者之間的差值，它包括天平解析度、天平重複性、偏載、遲滯及空氣浮力修正等影響因子。



圖二：影響量測不確定度之特性要因圖

4.2 步驟二：決定量測值 x_1, x_2, \dots, x_n

本試驗之量測值即為不確定度來源，又根據量測方程式及特性要因分析得知，不確定度來源為標準法碼追溯、標準法碼的變化、天平重複性、天平解析度、天平偏載效應、遲滯效應及空氣浮力修正等項目，故以下將分別針對這些項目進行量測分析，相關量測原始紀錄詳見附錄。

4.3 步驟三：估算每一量測值之標準不確定度： $u_c(x_i)$

依據 $u_c^2(y) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i)$ 觀念，套用到本研究之量測方程式 4-1 式，式中天平讀值 (R) 及標準法碼質量 (m_s) 為變數，故可得到下式：

$$u_c^2(I_c) = \left(\frac{\partial f}{\partial R}\right)^2 u^2(R) + \left(\frac{\partial f}{\partial m_s}\right)^2 u^2(m_s) \quad (4-2)$$

由 4-2 式可知，標準法碼之不確定度 $u(m_s)$ 的部分是由標準法碼追溯之不確定度 $u(m_r)$ 及標準法碼變化（即質量的不穩定性）所造成之不確定度 $u_s(m_r)$ 所組成；另外，電子天平之不確定度 $u(R)$ 的部分，則是由量測過程（重複性）的不確定度 $u_{rep}(R)$ 、遲滯作用的不確定度 $u_h(R)$ 、天平解析度的不確定度 $u_d(R)$ 、偏載效應的不確定度 $u_E(R)$ 及空氣浮力修正的不確定度 $u_b(R)$ 等 5 個影響因子所構成，分別說明如下：

$$(1) \text{ 標準法碼追溯之不確定度 } u(m_r) = \frac{U}{k} \quad (4-3)$$

U ：標準法碼追溯之擴充不確定度

k ：標準法碼追溯之擴充係數

【計算例】

本試驗所使用之標準法碼（5kg）不確定度及擴充係數分別為 3.4mg 及 1.98（見表一），故

$$u(m_r) = \frac{U}{k} = \frac{3.4}{1.98} = 1.717172 \text{mg}$$

表一：5000g 標準法碼校正資料

秤量	器號	檢驗報告編號	校正時間	校正結果 (g)	擴充不確定度 $U(\text{mg})$	擴充係數 k
5000g	301	標檢七校字第 BF97026 號	97/11/24	5000.0026	3.4	1.98
		高雄分局第 9331056 號	93/12/29	5000.0020	8.1	2

本項不確定度之評估方法屬 *Type B*，而其不確定度自由度的計算方式如下：

$$v_i \approx \frac{1}{2 \left(\frac{\Delta u_i}{u_i} \right)^2} \quad (4-4)$$

其中 $\frac{\Delta u_i}{u_i}$ 為判斷的不可靠程度，

由於對 $u(m_r)$ 評估結果的不可靠程度判斷為 15%，透過 4-4 式可得其自由度為 22。

$$(2) \text{ 標準法碼變化之不確定度 } u_s(m_r) = \frac{|m_{this}^C - m_{last}^C|/2}{\sqrt{3}} \quad (4-5)$$

m_{this}^C ：標準法碼這次追溯所得之約定質量值

m_{last}^C ：標準法碼上次追溯所得之約定質量值

$\sqrt{3}$ ：因假設其為矩形分配

【計算例】

依據表一資料，5000g 標準法碼 97 年度校正值為 5000.0026g (m_{this}^C)，93 年度校正值為 5000.0020g (m_{last}^C)，帶入 4-5 式可得：

$$u_S(m_r) = \frac{|m_{this}^C - m_{last}^C|/2}{\sqrt{3}} = \frac{|5000.0026 - 5000.0020|/2}{\sqrt{3}} = 0.000173205g$$

本項不確定度之評估方法屬 *Type B*，由於對 $u_S(m_r)$ 評估結果的不可靠程度判斷為 15%，透過 4-4 式可得其自由度為 22。

$$(3) \text{ 量測過程 (重複性) 的標準不確定度 } u_{rep}(R) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (4-6)$$

σ ：為讀值重複性標準差

n ：為量測次數

重複性的目的是在測量天平所顯示的讀值其一致性程度，通常用標準差來表示。由於電子天平並非衡量單一特定負載，且不同負載對於重複性的影響也會不一樣，一般是隨著負載越大其相對之標準差也就越大，因此需用兩個以上之負載來衡量天平讀值的重複性。通常採取之負載點為接近零點、最大負載之一半及最大負載；本研究採用二分之一最大負載及最大負載，這兩個秤量所求得之標準差大者做為天平的標準偏差估計值。

重複性的衡量是採用衡量最少引起兩個讀數：零點讀數 (z_i) 和所測量質量的讀數 (m_i) (本研究之 m_i 分別為二分之一最大負載及最大負載)，然後將此兩讀數的差值，做若干次的測量，並計算其標準差即為重複性之標準偏差。

$$r_i = m_i - z_i \quad (4-7)$$

$$\bar{r} = \frac{\sum r_i}{n} \quad (4-8)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (r_i - \bar{r})^2}{n-1}} \quad (4-9)$$

因此，標準偏差是依據在衡量盤上具有 M 質量的 10 組資料之間的差值所計算而成，

【計算例】

經由下表二資料計算結果，可知天平 PR5003 之重複性標準差為 4.472mg，故

$$u_{rep}(R) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{4.472}{\sqrt{10}} = 1.414171mg$$

自由度為 $n-1=10-1=9$ ，本項不確定度評估方法屬 A 類評估。

表二：重複性量測結果

	二分之一最大負載			最大負載		
	零點 <i>z</i>	天平讀值 <i>m</i>	差值 <i>r</i>	零點 <i>z</i>	天平讀值 <i>m</i>	差值 <i>r</i>
重複 1	0g	2500.01g	2500.01g	0g	5000.01g	5000.01g
重複 2	0g	2500.01g	2500.01g	0g	5000.01g	5000.01g
重複 3	0g	2500.01g	2500.01g	0g	5000.02g	5000.02g
重複 4	0g	2500.01g	2500.01g	0g	5000.01g	5000.01g
重複 5	0g	2500.01g	2500.01g	0g	5000.01g	5000.01g
重複 6	0g	2500.01g	2500.01g	0g	5000.01g	5000.01g
重複 7	0g	2500.01g	2500.01g	0g	5000.01g	5000.01g
重複 8	0g	2500.01g	2500.01g	0g	5000.00g	5000.00g
重複 9	0g	2500.01g	2500.01g	0g	5000.01g	5000.01g
重複 10	0g	2500.01g	2500.01g	0g	5000.01g	5000.01g
平均數			2500.01g			5000.01g
標準差			0g			0.004472g

$$(4) \text{ 偏載效應的標準不確定度 } u_E(R) = \frac{\frac{d_1}{d_2} \times D}{2 \times \sqrt{3}} \quad (4-10)$$

D ：為偏載測試中最大與最小值的差

d_1 ：為法碼中心至承載器中心的估計距離

d_2 ：為承載器中心至一個邊角的距離

$\sqrt{3}$ ：因假設其為矩形分配

由於負載置於天平上位置的不同，會產生角載荷（corner-load）的誤差，且負載質量的大小或負載放置的位置對於角載荷誤差的影響並非線性關係，因此要找到修正天平偏載讀數的值，並不容易。透過以下的方式將用來評估天平偏載誤差的效用。

將一質量的荷重放於天平秤盤的中央，然後連續將其置放於秤盤的前後左右的位置，並分別紀錄每次的讀值。通常是以單顆法碼

進行，以確保重心位置；而法碼質量可採用最大荷重的三分之一至二分之一即可；本試驗是以 2000g 標準法碼作為偏載試驗的秤重質量。

【計算例】

經由下表三資料計算結果，可知 $D = 20mg$ 、且 $\frac{d_1}{d_2}$ 約為 1/2，故

$$u_E(R) = \frac{\frac{d_1}{d_2} \times D}{2 \times \sqrt{3}} = 2.886751mg$$

本項不確定度之評估方法屬 *Type B*，由於對 $u_E(R)$ 評估結果的不可靠程度判斷為 10%，透過 4-4 式可得其自由度為 50。

表三：偏載量測結果

	中	前	後	左	右
次數 1	2000.01g	2000.00g	2000.00g	2000.02g	2000.02g
次數 2	2000.01g	2000.00g	2000.00g	2000.02g	2000.02g
次數 3	2000.01g	2000.00g	2000.00g	2000.02g	2000.02g
平均	2000.01g	2000.00g	2000.00g	2000.02g	2000.02g
相對中心的差值 (offset)	0g	-0.01g	-0.01g	0.01g	0.01g

$$D = |\max(\text{offset}) - \min(\text{offset})| = |0.01 - (-0.01)| = 0.02g = 20mg$$

$$(5) \text{ 天平解析度的標準不確定度 } u_d(R) = \frac{d}{2 \times \sqrt{3}} \quad (4-11)$$

d ：天平之最小解析度

$\sqrt{3}$ ：因假設其為矩形分配

當電子天平之最小解析度為 d 時，由於其讀值總是在正負二分之一個分度值間（即 $\pm 0.5d$ ），所以讀值落入這個區域的機率為 100%；且假設其為矩形分配。

【計算例】

本試驗之電子天平的解析度為 10mg 及 1mg，取 10mg 為 d 值。

$$u_d(R) = \frac{d}{2 \times \sqrt{3}} = 2.886751mg$$

本項不確定度之評估方法屬 *Type B*，由於對 $u_d(R)$ 評估結果的不可靠程度判斷為 15%，透過 4-4 式可得其自由度為 22。

$$(6) \text{ 遲滯作用的標準不確定度 } u_h(R) = \frac{H}{2 \times \sqrt{3}} \quad (4-12)$$

H ：為天平二分之一之最大秤量的遲滯作用的 3 次平均與零點的遲滯作用的 3 次平均的絕對值較大者。

$\sqrt{3}$ ：因假設其為矩形分配

【計算例】

遲滯校正的步驟為：(1) 天平歸零並記錄為 z_1 ，置放二分之一最大荷重法碼 M_1 ，紀錄為 m_1 ；(2) 再增加二分之一最大荷重法碼 M_2 後，再取下 M_2 ，紀錄為 m_2 ；(3) 再取下 M_1 ，紀錄為 z_2 ；(4) 重複上述步驟三次。

表四：遲滯效應量測結果

	z_1	m_1	m_2	z_2	$z_1 - z_2$	$m_1 - m_2$
重複 1	0g	2500.03g	2500.03g	0g	0g	0g
重複 2	0g	2500.02g	2500.02g	0g	0g	0g
重複 3	0g	2500.03g	2500.02g	0g	0g	0.01g
平均	--				0g	0.00333g

經由表四資料計算結果，可知 $H=3.333\text{mg}$ ，故

$$u_h(R) = \frac{H}{2 \times \sqrt{3}} = 0.962154\text{mg}$$

本項不確定度之評估方法屬 *Type B*，由於對 $u_h(R)$ 評估結果的不可靠程度判斷為 15%，透過 4-4 式可得其自由度為 22。

(7) 空氣浮力修正的不確定度

考慮本研究的實驗環境，大氣壓力約為 760mmHg 左右，溫度變化範圍在 15°C~30°C 之間，相對溼度變化範圍在 45%~65% 之間，使用 4-12 式計算空氣密度值，則本系統的空氣密度範圍如表五所示，最大值為 0.9156 kg/m³，最小值為 0.8612 kg/m³。

表五：空氣密度值

大氣壓力：760mmHg		溼度	
		45%	65%
溫度	15°C	0.9156	0.9140
	30°C	0.8651	0.8612

$$\rho_a = \frac{0.34848p - 0.009 \times (hr) \times \exp(0.062t)}{273.15 + t} \text{kg/m}^3 \quad (4-12)$$

其中：

ρ_a ：空氣密度 (kg/m³)

p ：大氣壓力 (mmHg)

hr ：相對溼度 (%)

t ：溫度 (°C)

【浮力原理說明】

質量 m 之法碼會受到重力加速度向下的重力及空氣之向上的浮力所影響，向下的重力為 $F_1 = m \times g$ ，而向上的浮力則為 $F_2 = \rho_a \times V_M \times g$ ，則法碼所受之總力即為

$$F = F_1 - F_2 = m \times g - \rho_a \times V_M \times g = m \times g \times (1 - \rho_a / \rho_m) \quad (4-13)$$

其中

V_M ：為法碼體積 ($V_M = m / \rho_m$)

因法碼所受到的重力加速度 g 都相同，故可將其忽略，因此法碼質量由浮力支撐的部分則為

$$m \frac{\rho_a}{\rho_m} \quad (4-14)$$

本試驗的法碼質量為 2kg，根據 *OIML R111* 所示， E_2 級不銹鋼法碼密度為 8000 kg/m^3 ，則本試驗在可能之環境條件之下（大氣壓力為 760mmHg、溫度 $15^\circ\text{C} \sim 30^\circ\text{C}$ 、溼度 45%~65%），其空氣密度範圍在 $0.8612 \text{ kg/m}^3 \sim 0.9156 \text{ kg/m}^3$ 之間，法碼質量由空氣浮力支撐的部分則分別為：

$$m \frac{\rho_a}{\rho_m} = 5000 \times \frac{0.8612}{8000} = 0.53825 \text{ g}$$

及

$$m \frac{\rho_a}{\rho_m} = 5000 \times \frac{0.9156}{8000} = 0.57225 \text{ g}$$

故法碼在本研究的環境條件之下，受到的空氣浮力支撐部分之差距為：

$$0.57225 - 0.53825 = 0.034 \text{ g}$$

由上述計算可知，當法碼密度在 8000 kg/m^3 時，法碼質量由空氣浮力支撐的部分可假設此不確定度符合寬度為 0.034g 的矩形分配；且由於對評估結果的質疑程度為 10%，即由 4-4 公式可得其自由度為 50；本項不確定度之評估方法屬 B 類。

【計算例】

$$u_b(R) = \frac{0.034}{2 \times \sqrt{3}} = 0.00981495 \text{ g} = 9.81495 \text{ mg}$$

4.4 步驟四：評估量測值是否具相關性

由於本試驗之各不確定度來源（標準法碼質量之不確定度與電子天平之不確定度）並不具相關性，故其共變異數 $u(m_s, R)=0$ 。

4.5 步驟五：根據量測方程式計算 Y 的估計值(y)及靈敏係數

由量測方程式 4-1 式可知，修正後器示值 I_C 的估計值導出如下：

$$y = f(m_s, R) = I_C = (R - m_s) + m_N \quad (4-15)$$

靈敏係數為對量測方程式分別對 R 及 m_s 做偏微分，得到下列結果：

$$\frac{\partial f}{\partial R} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial m_s} = -1$$

【計算例】

本研究測得的天平讀值(R)為 5000.00g，而標準法碼質量(m_s)為 5000.0026g，所以

$$y = f(m_s, R) = I_C = (R - m_s) + m_N = (5000.00 - 5000.0026) + 5000 = 4999.9974g \doteq 5000.00g \text{ (小數位數四捨五入至天平解析度位數)}$$

4.6 步驟六：決定估計值 y 的組合標準不確定度： $u_c(y)$

根據 *ISO GUM* 對組合標準不確定度在不具相關性時的定義

為： $u_c(y) = \sqrt{\sum \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_j)}$ ，其中 $u(x_j)$ 為 x_j 項的標準不確定度，

$\frac{\partial f}{\partial x_i}$ 為 x_j 項之靈敏係數。將量測方程式 4-1 式代入此定義中，可得

待校天平標稱點 X 估計值 y 之組合標準不確定度如下式 (4-16 式) 所示，另其有效自由度則使用 *Welch-Satterthwaite* 公式計算，如下式 (4-17 式) 所示：

$$u_c(x) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial R} \right)^2 u^2(R) + \left(\frac{\partial f}{\partial m_s} \right)^2 u^2(m_s)}$$

$$= \sqrt{u_{rep}^2(R) + u_h^2(R) + u_d^2(R) + u_E^2(R) + u_b^2(R) + u_s^2(m_r) + u^2(m_r)} \quad (4-16)$$

$$v_{eff} = \frac{u_c^4(x)}{\frac{u_{rep}^4(R)}{v(u_{rep}(R))} + \frac{u_h^4(R)}{v(u_h(R))} + \frac{u_d^4(R)}{v(u_d(R))} + \frac{u_E^4(R)}{v(u_E(R))} + \frac{u_b^4(R)}{v(u_b(R))} + \frac{u_s^4(m_r)}{v(u_s(m_r))} + \frac{u^4(m_r)}{v(u(m_r))}} \quad (4-17)$$

【計算例】

表六：各項因子之不確定度及自由度整理表

5kg	法碼追溯 $u_s(m_r)$	法碼變化 $u(m_r)$	重複性 $u_{rep}(R)$	偏載 $u_E(R)$	解析度 $u_d(R)$	遲滯 $u_h(R)$	浮力 $u_b(R)$
不確定度(mg)	1.717172	0.31754	1.414171	2.886751	2.886751	0.962154	9.81495
自由度	22	22	9	50	22	22	50

將上述不確定度影響因子及自由度（如表六所示）分別代入 4-16 式及 4-17 式中，則本研究之待校天平標稱點 X 估計值 y 之組合標準不確定度 $u_c(y)=10.904325mg$ ，有效自由度 $V_{eff} \doteq 75$ 。

4.7 步驟七：計算擴充不確定度： $U = k \times u_c(y)$ (4-18)

依據 *ISO GUM* 資料，通常取 95% 之信賴區間之 T 分配來當作擴充係數 k 值，自由度則為步驟六所得之有效自由度。

【計算例】

由步驟六得到之自由度為 75，查 T 分配表得到 95% 信賴區間之擴充係數為

$$k_{0.95} = T_{0.95}(v_{eff}) = 1.99$$

$$U = k \times u_c(y) = 1.99 \times 10.904325 = 21.699607mg \doteq 22mg$$

4.8 步驟八：量測結果表示： $y \pm U = y \pm k \times u_c(y)$ (4-19)

依據 *ISO GUM* 規範定訂之量測結果表達方式為量測值 y 加減擴充不確定度 U ，即 $y \pm U$ ，故本研究之量測結果如表七所示。

$$y \pm U = 5000.00g \pm 22mg$$

表七：量測結果

量測點	量測結果
5000g	5000.00g \pm 22mg

伍、系統能量之訂定

5.1 系統範圍：

本試驗適用於最大稱量 5kg 以下之電子天平校正作業，環境條件為溫度 15~30°C、相對溼度 45~65% 及 760mmHg 大氣壓力之下。

5.2 量測不確定度：

本試驗針對 *Mettler Toledo PR5003* 電子天平進行校正評估後，不同秤量（標稱值）之計算過程與結果，詳如附錄，最後將計算結果得到的相關資料整理於下表（表八）之中。

表八：電子天平 PR5003 校正評估結果

Mettler Toledo PR5003 (5kg/10mg 及 1mg)						
標稱值	5kg	2kg	1kg	500g	200g	100g
天平修正項(mg)	-2.6	-0.8	-4.37	-0.948	-0.031	-2.998
信賴水準	95%	95%	95%	95%	95%	95%
擴充係數	1.99	1.98	1.98	1.99	1.99	1.99
擴充不確定度(mg)	22	12	10	10	9	9

※天平修正項即為天平讀值(R) - 標準法碼質量(m_s)，其值取至小數位數四捨五入至天平解析度位數

陸、結論

本報告為電子天平自校能力之可行性研究（以 *Mettler Toledo PR5003* 為例），目的是評估本分局恆溫室電子天平之性能，主要是利用標準法碼校正天平，針對重複性、偏載效應、遲滯影響、解析度、空氣浮力修正、法碼變化及法碼追溯等七項因子做量測不確定度評估分析，最後計算得到不同秤點的擴充不確定度。

由本研究得知，本分局電子天平 *Mettler Toledo PR5003* 各秤點（5kg、2kg、1kg、500g、200g、100g）的擴充不確定度為分別為 35mg、26mg、25mg、25mg、25mg 及 25mg，即最大秤量 5kg 下，其擴充不確定度為 35mg。

由於本報告針對電子天平的校正程序做了詳實的試驗及紀錄，若讀者想自行校正天平，本報告應可提供相關資訊。

柒、附錄（*Mettler Toledo PR5003* 電子天平各秤點不確定度相關計算）

(1) 標準法碼追溯之不確定度

$$u(m_r) = \frac{U}{k} \quad (4-3)$$

參考表九的資料代入 4-3 式得到下列結果

標稱值	5kg	2kg	1kg	500g	200g	100g
$u(m_r)$ (mg)	1.717172	0.609137	0.284264	0.012183	0.008629	0.002439
自由度	22					

(2) 標準法碼變化之不定度

$$u_s(m_r) = \frac{|m_{this}^C - m_{last}^C|/2}{\sqrt{3}} \quad (4-5)$$

參考表九的資料代入 4-5 式得到下列結果

標稱值	5kg	2kg	1kg	500g	200g	100g
$u_s(m_r)$ (mg)	0.173205	0.31754	0.011547	0.088912	0.006062	0.006351
自由度	22					

(3) 量測過程 (重複性) 的標準不確定度

$$u_{rep}(R) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (4-6)$$

因為負載越大，相對量測之標準差也就越大，故各稱點量測過程不確定度將採 5kg 之重複量測所得之標準差為主。

標稱值	5kg	2kg	1kg	500g	200g	100g
$u_{rep}(R)$	1.414171mg					
自由度	9					

(4) 偏載效應的標準不確定度

$$u_E(R) = \frac{\frac{d_1 \times D}{d_2}}{2 \times \sqrt{3}} \quad (4-10)$$

由於採用天平最大荷重的三分之一至二分之一當作偏載荷重 (本研究採 2kg)，故各稱點的偏載不確定度應相同。

標稱值	5kg	2kg	1kg	500g	200g	100g
$u_E(R)$	2.886751 mg					
自由度	50					

(5) 天平解析度的標準不確定度

$$u_d(R) = \frac{d}{2 \times \sqrt{3}} \quad (4-11)$$

本研究之電子天平 (PR5003) 各稱量之最大解析度為 10mg，故各稱點之天平解析度不確定度也都相同。

標稱值	5kg	2kg	1kg	500g	200g	100g
$u_d(R)$	2.886751 mg					
自由度	22					

(6) 遲滯作用的標準不確定度

$$u_h(R) = \frac{H}{2 \times \sqrt{3}} \quad (4-12)$$

由於採用天平最大荷重的二分之一當作負重 (本研究採 2kg)，故各稱點的遲滯效應不確定度應相同。

標稱值	5kg	2kg	1kg	500g	200g	100g
$u_h(R)$	0.962154 mg					
自由度	22					

(7) 空氣浮力修正的不確定度 $u_b(R)$

根據 OIML R111 所示， E_2 級不銹鋼法碼密度(ρ_m)為 8000 kg/m^3 ，且本研究在可能之環境條件之下（大氣壓力為 760 mmHg 、溫度 $15^\circ\text{C} \sim 30^\circ\text{C}$ 、溼度 $45\% \sim 65\%$ ），其空氣密度範圍在 0.8612 kg/m^3 (ρ_{a1}) $\sim 0.9156 \text{ kg/m}^3$ (ρ_{a2})之間（由公式 4-12 計算得之），所以 $u_b(R)$ 為

$$u_b(R) = \frac{\left| m \frac{\rho_{a1}}{\rho_m} - m \frac{\rho_{a2}}{\rho_m} \right|}{2 \times \sqrt{3}} = \frac{m |\rho_{a1} - \rho_{a2}|}{2 \sqrt{3} \times \rho_m} = 1.962990915 \times 10^{-6} \times m$$

將各秤點 (m) 帶入上式中，可得到下表資料。

標稱值	5kg	2kg	1kg	500g	200g	100g
$u_b(R)$ (mg)	9.814955	3.925982	1.962991	0.981495	0.392598	0.196300
自由度	50					

(8) 根據量測方程式計算 Y 的估計值(y)

$y = f(m_S, R) = I_C = (R - m_S) + m_N$ (小數位數四捨五入至天平解析度位數)

標稱值	5kg	2kg	1kg	500g	200g	100g
R (g)	5000.00	2000.00	1000.004	499.999	200.000	100.003
m_S (g)	5000.0026	2000.0008	999.99963	499.999948	200.000031	100.000002
天平修正 項($R - m_S$)	-0.0026	-0.0008	-0.00437	-0.000948	-0.000031	-0.002998
$y = I_C$ (g)	5000.00	2000.00	999.996	499.999	200.000	99.997

※天平修正項即為天平讀值(R) - 標準法碼質量(m_S)，其值取至小數位數四捨五入至天平解析度位數

(9) 組合標準不確定度

將上述資料代入 4-16 式及 4-17 中，可得到下表的資料

$$u_c(x) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial R}\right)^2 u^2(R) + \left(\frac{\partial f}{\partial m_S}\right)^2 u^2(m_S)}$$

$$= \sqrt{u_{rep}^2(R) + u_h^2(R) + u_d^2(R) + u_E^2(R) + u_b^2(R) + u_s^2(m_r) + u^2(m_r)} \quad (4-16)$$

$$v_{eff} = \frac{u_c^4(x)}{v(u_{rep}(R)) + v(u_h(R)) + v(u_d(R)) + v(u_E(R)) + v(u_b(R)) + v(u_s(m_r)) + v(u(m_r))} \quad (4-17)$$

標稱值	5kg	2kg	1kg	500g	200g	100g
$u_c(x)$ (mg)	10.904325	5.956299	4.850418	4.534718	4.443706	4.430673
V_{eff}	75	129	104	84	78	77

組合不確定度取到小數 4 位數，自由度取小數點無條件進入

(10) 擴充不確定度 $U = k \times u_c(x)$

標稱值	5kg	2kg	1kg	500g	200g	100g
$k_{0.95} = T_{0.95}(v_{eff})$	1.99	1.98	1.98	1.99	1.99	1.99
$U(mg)$	22	12	10	10	9	9

取到小數 1 位無條件進入

表九：50g ~ 2000g 標準法碼校正資料

秤量	器號	檢驗報告編號	校正時間	校正結果 (g)	擴充不確定度 $U(mg)$	擴充係數 k
5000g	301	標檢七校字第 BF97026 號	97/11/24	5000.0026	3.4	1.98
		高雄分局第 9331056 號	93/12/29	5000.0020	8.1	2
2000g	301	標檢七校字第 BF97026 號	97/11/24	2000.0008	1.2	1.97
		高雄分局第 9331056 號	93/12/29	1999.9997	6.4	2
1000g	301	標檢七校字第 BF97026 號	97/11/24	999.99963	0.56	1.97
		高雄分局第 9331056 號	93/12/29	999.99967	0.82	2
500g	80091	量測中心 B980433	98/6/17	499.999948	0.024	1.97
		標檢七校字第 548-1 號	95/4/27	499.99964	0.32	1.96
200g	80091	量測中心 B980433	98/6/17	200.000031	0.017	1.97
		標檢七校字第 548-1 號	95/4/27	200.00001	0.13	1.97
100g	80091	量測中心 B980433	98/6/17	100.000002	0.005	2.05
		標檢七校字第 548-1 號	95/4/27	99.999980	0.061	1.96

捌、參考文獻

- (1) Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement, Geneva : ISO, 1995.
- (2) Weights of classes $E_1, E_2, F_1, F_2, M_1, M_2, M_3$, OIML (International Organization of Legal Metrology) R111, 1994.
- (3) Mettler Toledo PR5003 Operating Instructions.

- (4) 經濟部標準檢驗局第七組質量校正實驗室，天平校正不確定度評估報告，民國 96 年 1 月 5 日。
- (5) 經濟部標準檢驗局新竹分局第五課，天平校正不確定度評估報告，民國 97 年 8 月 15 日。
- (6) 經濟部標準檢驗局新竹分局第五課，天平校正作業說明書，民國 97 年 8 月 15 日。
- (7) 衡器不確定度評估，工業技術研究院，張啟生，民國 96 年 4 月 26 日。
- (8) 質量（電子天平）量測能力之實證研究，標準與檢驗月刊，陳鴻麟，民國 96 年 4 月。
- (9) 天平的原理、校正與不確定度分析，工業技術研究院，楊豐瑜。
- (10) 量測不確定度評估訓練課程講義，工業技術研究院，段靜芬，民國 98 年 8 月。